



**Universidade
de Aveiro
2010**

Departamento de Matemática

**Manuel Robalo
Évora**

**Controlo H_∞ : uma aplicação a sistemas
eléctricos de energia**



Universidade de
Aveiro
2010

Departamento de Matemática

Manuel Robalo Evora Controlo H_∞ : uma aplicação a sistemas eléctricos de energia

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada à Engenharia, realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Paula Macedo Rocha Malonek, Professora Catedrática do Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Apoio financeiro do Instituto Português
de Apoio ao Desenvolvimento(IPAD)



COOPERAÇÃO
PORTUGUESA

Aos meus pais, aos meus filhos e aos meus irmãos, pessoas que fazem parte de mim por razões necessárias e com as quais, de certo modo, me confundo e e àquelas pessoas que por vontade própria, e por motivo qualquer decidiram, partilhar a viagem comigo nalgum percurso nas qualidades de esposa, professor, amigo, colega e outros que acabam por determinar mais gente, seguramente, que virão no resto do percurso.

o júri

Presidente

Doutor Domingos Moreira Cardoso,
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Vogal

Doutora Maria Paula Macedo Rocha Malonek,
Professora Catedrática do Departamento de Engenharia Electrotécnica
e de Computadores da Faculdade de Engenharia da Universidade do
Porto (orientadora)

Vogal

Doutor Paulino Fortes, Professor da Universidade de Cabo Verde

agradecimentos

À Professora Doutora Maria Paula Macedo Rocha Malonek por ter aceite, em circunstância muito especial, ser minha Orientadora e também fazer-me sentir as dificuldades como sendo coisas das mais humanas que há.

Ao Instituto Português de Apoio ao Desenvolvimento, entidade que financiou este Mestrado.

À parceria Universidade de Aveiro e Universidade de Cabo Verde que tornou realidade este projecto.

palavras-chave

Sistemas de controlo, função de transferência, controlo H-infinito, sistemas eléctricos de energia.

resumo

Este trabalho consiste no estudo de técnicas de controlo para sistemas sujeitos a perturbações baseadas no critério de minimização da norma H-infinito da função de transferência que relaciona a saída do sistema com a perturbação a que ele está sujeito. Estas técnicas são utilizadas para o controle de uma turbina no processo de geração de electricidade.

keywords

Control systems, transfer function, H-infinity control, electric power systems.

abstract

This work consists in the study of H-infinity control techniques for systems with disturbances based on the minimization of the H-infinity norm of the transfer function that relates the system output with the disturbance. These techniques are used in order to design a controller for a turbine in an electric power plant.

Índice

	Introdução	3
1	Sistemas de energia	5
1.1	Aspectos básicos	5
1.2	Controlo da velocidade de uma turbina	7
2	Controlo por optimização da norma H_∞	15
2.1	Preliminares	15
2.2	O problema standard de controlo H_∞	16
2.3	Parametrização de todos os controladores estabilizantes	19
2.3.1	Factorizações coprimas em RH_∞	19
2.3.2	Estabilização em termos de factorizações coprimas	23
2.3.3	Estabilizabilidade em termos de factorizações coprimas	24
2.3.4	Parametrização	25
2.4	Reformulação do problema standard	26
2.5	Solução do problema de ajuste do modelo – caso escalar	28
2.5.1	Existência de solução	29
2.5.2	Determinação de uma solução óptima – caso escalar	29
2.6	Implementação em MATLAB	35
3	Aplicação ao controlo de sistemas eléctricos de energia	37
3.1	O esquema de controlo	37
3.2	Simulações	41
4	Conclusão	47
5	Bibliografia	49
	Anexo	

Introdução

A energia eléctrica tornou-se vital para cada individuo, sendo cada vez mobilizados mais recursos para a garantia não só da sua quantidade bem como da sua qualidade e eficiência na sua utilização. Por este motivo, o desenvolvimento do controlo de sistemas encontrou no sector de energia eléctrica uma das áreas de aplicação privilegiada.

O controlo de sistemas é utilizado globalmente com objectivo de optimização dos custos de produção e transporte em redes de energia eléctrica sob um apertado controlo das tensões, parâmetros locais, e da frequência que é um parâmetro global e estandardizado a nível mundial. Actualmente no mundo funcionam duas frequências diferentes, 60 para Países como EUA e o Brasil e, 50 Hz, para os restantes países. A tolerância da variação de frequência da energia eléctrica é de $\pm 1\%$.

Num sistema de produção e distribuição de energia eléctrica temos duas potências de naturezas diferentes, a potência activa e a reactiva, a primeira a determinar o comportamento da frequência e a segunda o comportamento das tensões nas redes, de uma certa forma, independente. Isto permite que o tratamento das tensões e da frequência sejam efectuadas por mecanismos diferentes.

Neste trabalho teremos como objectivo o estudo da regulação da potência activa – frequência, através de controladores H_∞ . Estes controladores são usados em sistemas sujeitos a perturbações, de modo a minimizar a norma H_∞ da função de transferência das perturbações para as saídas, minimizando assim o efeito daquelas.

O método classicamente usado para a regulação da frequência é apresentado no primeiro capítulo, com base em [Elgerd 83; Peças Lopes 83; Sucena Paiva 07]. No segundo capítulo fazemos uma exposição sobre os aspectos do desenho de controladores H_∞ mais relevantes para o nosso estudo, baseada em [Francis, 87]. No terceiro capítulo aplicamos a teoria apresentada no capítulo anterior ao desenho de um controlador para um sistema eléctrico de energia, ilustrando a esta aplicação com algumas simulações. Finalmente, no quarto capítulo apresentamos as conclusões. As noções básicas de sistemas de controlo, nas quais assenta o trabalho desenvolvido, foram colocadas em anexo.

Integrando-se esta dissertação num mestrado em Matemática Aplicada à Engenharia, foi privilegiada a procura de técnicas adequadas para a resolução do problema considerado, não se tendo nela incluído as demonstrações de alguns dos resultados apresentados, que podem ser encontradas em [Francis, 87]. O estudo da aplicação MATLAB e a escrita de códigos para a obtenção dos controladores desejados, constituíram também uma parte significativa do trabalho levado a cabo.

1. Sistemas de energia

1.1 Aspectos básicos

A manutenção da frequência dentro do nível desejado é determinada pelo balanço permanente entre as potências activas gerada e consumida num sistema, uma vez que não é possível armazenar energia eléctrica.

Um aumento de carga suscita um aumento de geração de potência. Entretanto, isto não ocorre instantaneamente. A potência gerada pode ser variada por via da variação da abertura da válvula de admissão das turbinas ou dos motores Diesel e outros semelhantes que accionam os geradores. Até ser restabelecido o equilíbrio resultante da variação nas solicitações da potência activa, a compensação do incremento na demanda da carga é satisfeita à custa da energia cinética armazenada nas massas girantes dos grupos geradores.

A uma rede isolada modelada por um gerador equivalente, considerado de rendimento unitário, corresponde a seguinte equação de balanço energético

$$P_M - P_C = \frac{dW_{cin}}{dt} \quad (1.1)$$

onde P_M é a potência mecânica fornecida pela máquina motriz, P_C a potência de carga e W_{cin} a energia cinética das massas girantes, dada por:

$$W_{cin} = \frac{1}{2} I w^2 \quad (1.2)$$

onde I é o momento de inércia e w a velocidade angular.

Quando se verifica um desequilíbrio entre a potência fornecida pela máquina e a potência de carga, a energia cinética diminui ou aumenta, consoante o deficit esteja do lado da produção ou da carga, suscitando uma variação da velocidade angular e da frequência. A estabilidade da velocidade angular e, em resultado, da frequência constituem um indicador do equilíbrio das potências gerada e consumida no sistema, sendo o seu desvio relativo ao valor nominal um indutor da actuação do sistema de controlo frequência-potência activa, cuja tarefa é restabelecer este equilíbrio automaticamente.

Num sistema em que diversos centros produtores estão interligados através de uma rede, a frequência assume um carácter de uma grandeza de natureza global, sendo a sua regulação uma tarefa conjunta de todos os operadores de sistema. Quando é elevada a potência girante em sistemas de grande potência, a frequência mantém-se normalmente dentro de uma banda pré-estabelecida.

Os sistemas de controlo de frequência têm constantes de tempo elevadas, devido aos elevados momentos de inércia das turbinas e dos alternadores, de modo que a sua entrada em acção leva um relativo atraso em comparado com sistema de controlo da tensão.

Ao longo do dia e do ano, de acordo com um diagrama previsível, o operador de sistema tem de planificar os meios de produção que vai utilizar, e promover a sua ligação à rede nos momentos em que são necessários. A taxa de aumento da carga é variável, sendo elevada no período matinal, entre as 07:00 e as 09:00 horas, o que obriga a afectação de centrais com maior capacidade na velocidade de resposta às demandas de potência, como centrais hídricas ou de turbina a gás.

Com base no despacho económico, é atribuído a cada grupo um valor da potência gerada. É contudo extremamente improvável que o total da potência atribuída iguale em cada instante a carga, a qual, para além da variação previsível, experimenta continuamente pequenas flutuações que se sobrepõem àquela. Os geradores são assim

chamados a variar automaticamente a sua potência, de forma a manter a sua frequência no seu valor nominal. Esta tarefa é realizada pelo sistema de controlo de frequência-potência, de importância crucial para o funcionamento do sistema de energia eléctrica.

A cada gerador é associado um regulador de velocidade que assegura o controlo individual. O controlo sistémico, centralizado, é efectuado a partir do centro e gestão do sistema (centro de comando). A potência que transita nas linhas de interligação entre os vários sistemas é objecto de contrato, pelo que deve ser também mantida constante. Esta tarefa é também executada pelo sistema de controlo sistémico ou secundário.

Se a capacidade de produção for insuficiente para servir a carga do sistema – por motivo da saída de serviço imprevisto de um grupo ou central e as linhas de interligação disponíveis, que funcionando como alternativa, não dispuserem de capacidade de transporte suficiente - a frequência experimenta uma redução sustentada no tempo. A partir de uma diminuição da ordem de 1 Hz, a situação torna-se séria, havendo o risco de um apagão geral, se não forem tomadas medidas de emergência. Estas medidas traduzem-se no delastre de carga, desencadeado automaticamente por relés de mínimo de frequência, os quais desligam selectivamente blocos de consumidores, de forma a repor o balanço entre a produção e o consumo.

1.2 Controlo da frequência de uma turbina

O controlo de frequência de cada grupo gerador está a cargo de um regulador de velocidade. Na Figura 1.1, representa-se esquematicamente o sistema de regulação de velocidade de um gerador isolado alimentando uma carga local. O regulador de velocidade mede a velocidade de rotação do grupo, comparando-a com o valor de referência e actua sobre a válvula de admissão de fluído à máquina de accionamento. Deste modo se torna possível variar a potência mecânica de cada grupo e, conseqüentemente, a potência activa fornecida pelo gerador.

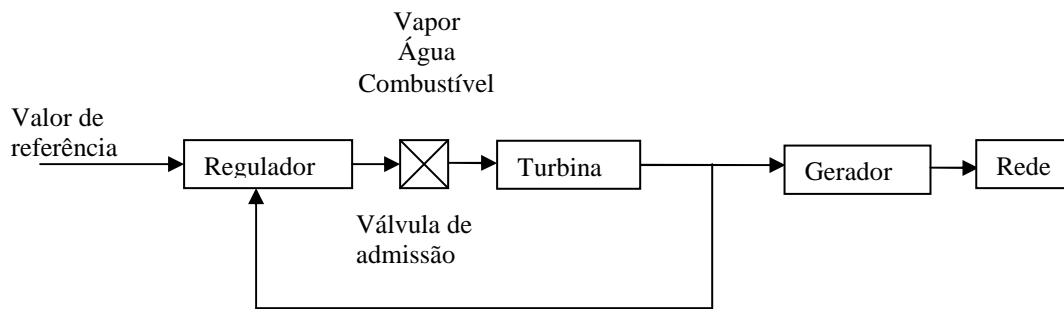


Figura 1.1 Diagrama esquemático do sistema de regulação de velocidade [Sucena Paiva, 2007]

Uma rede de grande potência, cuja frequência é praticamente invariável, normalmente modelada como um sistema de potência infinita, impõe a velocidade de rotação de um gerador a ela ligado, correspondendo a posição do variador de velocidade, ao fim e ao cabo, a uma referência de potência. A frequência da rede é assegurada pelo controlo sistémico que por sua vez dita a potência dos grupos aos quais estão ligados.

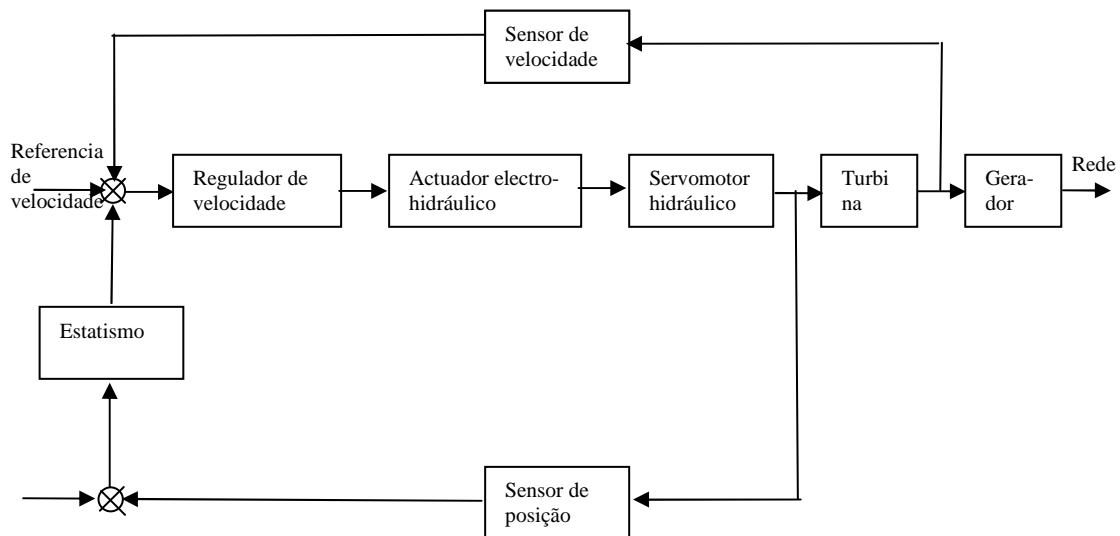


Figura 1.2: Sistema de regulação de velocidade electro-hidráulico [Sucena Paiva, 2007]

Actualmente usa-se um regulador electro-hidráulico, conforme ilustrado na Figura 1.2. A velocidade é medida por meio de uma roda dentada e uma sonda magnética que detecta variações do campo ou por um detector de efeito de Hall. A movimentação da válvula de admissão continua a ser efectuada por meio de um

servomotor hidráulico. A interface entre a electrónica e o servomotor é realizada por um actuador electro-hidráulico, cuja entrada é uma corrente eléctrica que excita uma bobina móvel e cuja saída é a posição de um pistão que comanda o servomotor principal. O sensor de posição da válvula de admissão fornece uma tensão proporcional ao deslocamento, usando-se em geral um transformador diferencial, constituído por dois circuitos magnéticos, dentro de cujos entreferros se desloca um núcleo móvel. A potência fornecida pela turbina é aproximadamente proporcional à posição da válvula de abertura, contudo, em reguladores mais sofisticados, a potência eléctrica é medida directamente. O sistema possui duas referências, de frequência e de potência; no caso de a potência eléctrica ser medida directamente, a última pode ser rigorosamente calibrada.

Pretendemos agora formular um modelo matemático linearizado do regulador de velocidade, para o que consideramos pequenas variações em torno de um ponto de funcionamento dado. Assim, passamos a designar por ΔA a diferença entre uma variável A e o seu valor A^0 no ponto nominal. Na Figura 1.3.a) representa-se o diagrama de blocos simplificado de um regulador mecano-hidráulico ou electro-hidráulico. O integrador descrito pela função de transferência K_{SM}/s modela o servomotor hidráulico. Com efeito, sendo o caudal de óleo sob pressão proporcional à posição x do actuador electro-hidráulico, a posição do pistão do servomotor P_v que comanda a válvula de admissão é dada pela expressão, onde a constante K_{SM} depende da geometria do cilindro e da pressão do óleo:

$$\Delta P_v = K_{SM} \int \Delta x dt \quad (1.3)$$

Assim, a função de transferência $G_{SM}(s)$ do servomotor é dada por

$$G_{SM}(s) = \frac{K_{SM}}{s}.$$

Designando por $G_C(s)$ a função de transferência do regulador de velocidade da Figura 1.2 e por Δw e Δw_{ref} os desvios da velocidade e da velocidade de referência, respectivamente, em relação ao ponto de funcionamento, obtemos o diagrama da

Figura 1.3 a). Despreza-se a dinâmica dos restantes elementos, cuja resposta é mais rápida.

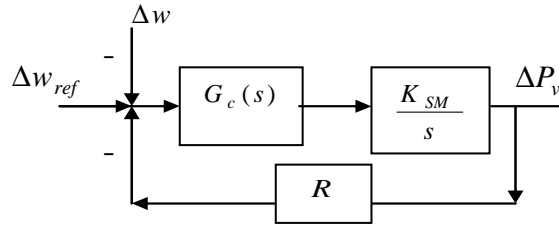


Figura 1.3 a) Diagrama de blocos para a regulação de velocidade

A referência de velocidade é fixa pelo que $\Delta w_{ref} = 0$. Assim, deste diagrama de blocos, retira-se a relação:

$$\Delta P_v = \frac{-\frac{K_{SM}}{s} G_c(s)}{1 + \frac{K_{SM}}{s} G_c(s) R} \Delta w . \quad (1.4)$$

De entre os diferentes tipos de controladores habitualmente considerados, o de maior simplicidade, adoptado na exposição que se segue, é um ganho puro, isto é $G_c(s) = K_c$. Definindo $K = K_{SM} K_c$ e $p = KR$, obtém-se:

$$\Delta P_v = \frac{-K}{s + p} \Delta w . \quad (1.5)$$

Esta equação corresponde ao diagrama da Figura 1.3 b).

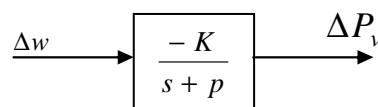


Figura 1.3 b) Esquema simplificado

De seguida, apresentamos alguns modelos simplificados usualmente utilizados para diferentes tipos de turbinas de vapor e hidráulicas.

Para turbinas de vapor sem reaquecimento, pode usar-se a função de transferência:

$$G_T(s) = \frac{\Delta P_M}{\Delta P_v} = \frac{1}{1 + sT_T} \quad (1.6)$$

P_M é a potência mecânica fornecida ; e P_v ,a posição da válvula de admissão. A constante de tempo T_T apresenta valores da ordem de 0,1-0,5 s.

Para turbinas de vapor com reaquecimento, com um corpo de alta pressão e outro de baixa pressão, sendo o vapor reaquecido entre ambos, a função de transferência é:

$$G_T(s) = \frac{\Delta P_M}{\Delta P_v} = \frac{1}{1 + sT_T} \frac{1 + f_{AP}sT_{T2}}{1 + sT_{T2}} \quad (1.7)$$

A constante de tempo T_{T1} é idêntica à das turbinas sem reaquecimento T_T ; a constante de tempo T_{T2} deve-se ao reaquecedor, assumindo valores da ordem de 5-10 s; f_{AP} (p.u. na base da potência nominal) é a parcela da potência produzida no corpo de alta pressão, com um valor típico de 0,3. Para turbinas hidráulicas, a função de transferência correntemente utilizada é:

$$G_T(s) = \frac{\Delta P_M}{\Delta P_v} = \frac{1 - sT_\omega}{1 + sT_\omega/2} \quad (1.8)$$

T_ω é o tempo de arranque da água na conduta forçada – tempo necessário para acelerar a água do repouso até à velocidade em regime estacionário – dado pela expressão

$$T_\omega = \frac{l v}{g h} \quad (1.9)$$

l é o comprimento da conduta ; v , a velocidade da água; g , a aceleração da gravidade; e h , a queda. T_ω varia com a carga entre 0,5 e 4,0 s.

Em regime estacionário, a potência eléctrica gerada é igual à potência mecânica fornecida pela turbina, uma vez que as perdas no gerador são consideradas desprezíveis. Em regime transitório, contudo, tal não sucede: a potência eléctrica tem de igualar a carga em cada instante, sendo o eventual desajuste entre aquela e a potência mecânica suprido pela energia cinética armazenada nas massas girantes do grupo turbina-gerador [Sucena Paiva, 2007].

Resulta das equações (1.1) e (1.2) que

$$P_A = I w \dot{w}, \quad (1.10)$$

onde $P_A = P_M - P_C$ é a potência de aceleração.

Considerando o modelo linearizado em torno de um ponto de funcionamento em que $P_C^0 = P_M^0$, correspondente a uma velocidade angular nominal desejada w^0 , verifica-se que nesse ponto de funcionamento, a potência de aceleração $P_A = P_M - P_C$ é nula. Designando $\Delta P_A = P_A - P_A^0$, $\Delta P_M = P_M - P_M^0$, $\Delta P_C = P_C - P_C^0$ e $\Delta w = w - w^0$, verifica-se que

$$\Delta P_A = \Delta P_M - \Delta P_C = P_M - P_C = M \Delta \dot{w}, \quad (1.11)$$

onde $M = 2 I w^0$ é uma constante resultante da linearização da equação (1.1).

Aplicando transformada de Laplace, mas mantendo a mesma notação para os sinais e as suas transformadas, obtemos

$$M s \Delta w = \Delta P_A.$$

Assim, o diagrama de blocos em malha fechada, considerando uma turbina com função de transferência dada pela equação (1.8), é o que se representa na Figura 1.4.

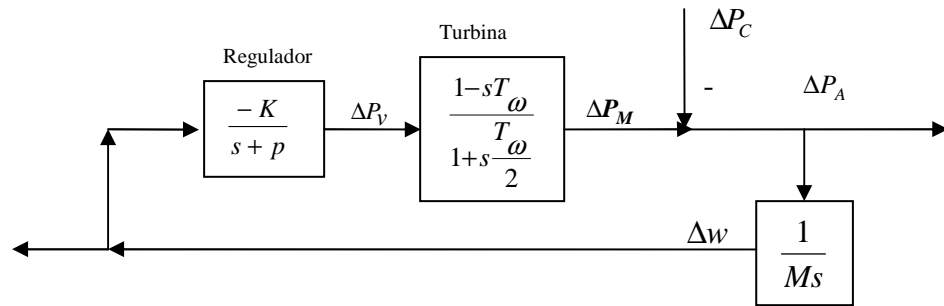


Figura 1.4 Diagrama de blocos do regulador de velocidade e da turbina

O objectivo deste trabalho é utilizar como abordagem alternativa o controlo pelo critério de optimização da norma H_{∞} no processo atrás descrito, considerando as variações na potência de carga como perturbações e tentando minimizar a norma H_{∞} da função de transferência que corresponde à influência destas variações no comportamento do sistema. Os princípios fundamentais do controlo pelo critério de optimização da norma H_{∞} são descritos no capítulo que se segue.

2. Controlo por optimização da norma H_∞

2.1 Preliminares

O problema aqui considerado é o seguinte. Dado um sistema (designado por planta) com perturbações, como desenhar um controlador que minimize a norma H_∞ de uma determinada matriz de transferência no correspondente sistema realimentado. A norma H_∞ de uma matriz de transferência corresponde ao seu ganho máximo relativamente a todas as possíveis frequências. Quanto menor for a norma H_∞ de uma matriz de transferência, menor é a amplificação da saída correspondente à “pior” entrada possível. Assim, se minimizarmos a norma H_∞ da função de transferência que relaciona a saída de um sistema com as perturbações que nele actuam, reduzimos ao máximo a influência da “pior” perturbação.

Começamos por introduzir algumas noções fundamentais para o desenvolvimento que se segue.

Designa-se por H_∞ o espaço das funções complexas $F(s)$ que são analíticas no semi-plano direito (isto é para $\text{Re } s > 0$). A norma definida neste espaço por

$$\|F\|_\infty := \sup\{|F(s)| : \text{Re } s > 0\}$$

é chamada a norma H_∞ de F . O subespaço das funções racionais-reais (isto é das funções racionais com coeficientes reais) em H_∞ é designado por RH_∞ . Uma função racional-real pertence a este subespaço se e só se não tiver pólos em $\text{Re } s \geq 0$, isto é, se for uma função de transferência estável, e se for própria. Assim, RH_∞ é o espaço das funções racionais-reais estáveis e próprias. Verifica-se que, se $F \in RH_\infty$, então

$$\|F\|_\infty := \sup \{ |F(j\omega)| : \omega \in \mathbb{R} \}.$$

Com um certo abuso de linguagem, usaremos também a notação RH_∞ para designar o conjunto das matrizes com entradas em RH_∞ , ou seja as matrizes racionais-reais próprias e estáveis. Sendo G uma matriz de RH_∞ , a sua norma é definida como:

$$\|G\|_\infty := \sup \{ \|G(j\omega)\| : \omega \in \mathbb{R} \},$$

onde $\|G(j\omega)\|$, a norma da matriz complexa $G(j\omega)$, é dada pelo seu maior valor singular.

2.2 O problema standard de controlo H_∞

Considere-se o diagrama representado na Figura 2.1.

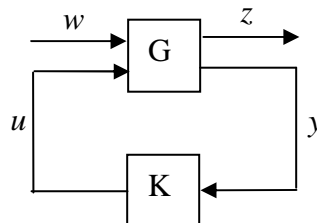


Figura 2.1. Diagrama de blocos standard [Francis 1987]

As matrizes de transferência G e K são racionais-reais e próprias. G representa uma planta genérica, parte fixa do sistema. K representa um controlador.

A variável w é, genericamente, um vector que consiste em entradas não manipuláveis e perturbações, u é o vector dos sinais de controlo, z é um sinal vectorial representando as variáveis a serem controladas e y é a saída que é medida.

Particionando a matriz de transferência G em blocos de acordo com as dimensões das variáveis w , z , u e y :

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} z &= G_{11}w + G_{12}u \\ y &= G_{21}w + G_{22}u \\ u &= Ky \end{aligned} \quad (2.2)$$

Para definir o que se entende por estabilização da planta G pelo controlador K , introduzem-se duas entradas adicionais v_1 e v_2 como mostra a Figura 2.

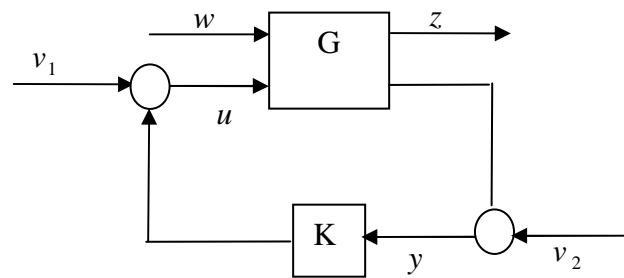


Figura 2.2. Diagrama para definição de estabilidade [Francis 1987]

A equação que relaciona as três entradas w, v_1 e v_2 com as saídas z, u e y é

$$\begin{bmatrix} I & -G_{12} & 0 \\ 0 & I & -K \\ 0 & -G_{22} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ G_{21} & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

A teoria fica bastante simplificada se a matriz própria racional-real

$$\begin{bmatrix} I & -G_{12} & 0 \\ 0 & I & -K \\ 0 & -G_{22} & I \end{bmatrix}$$

que surge no primeiro membro da equação, possuir uma inversa própria e racional-real, para todos os controladores racionais-reais K . Uma condição suficiente para que tal aconteça é que G_{22} seja estritamente própria. Assumiremos daqui em diante que de facto esta condição é satisfeita. Assim as nove matrizes de transferência de w, v_1 e v_2 para z, u e y são próprias. Se além disso todas estas matrizes de transferência forem estáveis, isto é, se pertencerem a RH_∞ , então dizemos que K estabiliza G .

O problema standard de desenho de controladores H_∞ é então: Encontrar um controlador K racional-real e próprio que estabilize G e minimize a norma H_∞ da matriz de transferência de w para z . Esta matriz de transferência é uma transformação linear fraccionária de K dada por:

$$z = [G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}]w \quad (2.4)$$

De facto, resulta de (2.2) que

$$\begin{aligned} z &= G_{11}w + G_{12}Ky \\ y &= G_{21}w + G_{22}Ky, \end{aligned}$$

pelo que

$$y = (I - G_{22}K)^{-1}G_{21}w \text{ e } z = G_{11}w + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}w,$$

donde resulta (2.4).

2.3 Parametrização de todos os controladores estabilizantes

Uma vez que é difícil a procura directa de um controlador estabilizante K que minimize a norma H_∞ da matriz de transferência dada em (2.4), procede-se primeiro a uma parametrização de todos controladores estabilizantes de G através da introdução de um parâmetro Q , uma nova matriz de transferência que permite reescrever a função de transferência inicial numa forma mais simples.

Antes de apresentarmos esta parametrização introduzimos algumas noções e resultados importantes para o nosso propósito.

2.3.1 Factorizações coprimas em RH_∞

Duas matrizes F e G em RH_∞ são coprimas à direita se tiverem igual número de colunas e existirem matrizes X e Y em RH_∞ tais que é satisfeita a identidade de Bézout:

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = XF + YG = I \quad (2.5)$$

Isto equivale afirmar que $\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$ é invertível à esquerda em RH_∞ .

De forma similar, duas matrizes F e G em RH_∞ são coprimas esquerda se tiverem igual número de linhas e existirem X e Y em RH_∞ , tais que:

$$\begin{bmatrix} F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = FX + GY = I, \quad (2.6)$$

o que equivale a dizer que $\begin{bmatrix} F & G \end{bmatrix}$ é invertível à direita em RH_∞ .

Dada uma matriz de transferência G própria e racional-real, uma factorização coprima direita de G é dada por

$$G = NM^{-1} \quad (2.7)$$

com N e M coprimas à direita em RH_{∞} . Do mesmo modo, uma factorização coprima esquerda de G é dada por

$$G = \tilde{M}^{-1}\tilde{N} \quad (2.8)$$

com \tilde{M} e \tilde{N} coprimas à esquerda. Estas definições requerem implicitamente que M e \tilde{M} sejam quadradas e não singulares.

O lema que se segue afirma que toda a matriz de transferência em RH_{∞} possui uma factorização coprima direita e uma factorização coprima esquerda com características especiais.

Lema 1. *Para cada matriz G própria, racional-real, existem oito matrizes RH_{∞} que satisfazem às equações*

$$G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & -\tilde{Y} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & Y \\ N & X \end{bmatrix} = I \quad (2.9)$$

A esta factorização dá-se o nome de factorização duplamente coprima de G .

A factorização coprima de uma matriz de transferência pode ser levada a cabo com base nas suas realizações de espaço de estado.

Recordemos que uma realização de espaço de estados de uma matriz de transferência G é um quádruplo de matrizes A , B , C e D , de dimensões adequadas tais que:

$$G(s) = D + C(s - A)^{-1}B \quad (2.10)$$

Usaremos a notação $[A, B, C, D]$ para nos referirmos à função de transferência acima indicada.

Introduzindo os vectores de estado, entrada e saída pelos vectores x , u e y , respectivamente, temos que

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{2.11}$$

e $y = Gu$.

Suponha-se ainda, sem perda de generalidade (A,B) estabilizável e (C,A) detectável. Escolha-se uma matriz real F tal que $A_F = A + BF$ seja estável (isto é, todos os valores próprios estão em $Re\ s < 0$) e defina-se o vector $v := u - Fx$ e a matriz $C_F := C + DF$. Então resulta que

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_F x + Bv \\ u &= Fx + v \\ y &= C_F x + Dv\end{aligned}\tag{2.12}$$

Conclui-se assim que a matriz de transferência de v para u é

$$M(s) = [A_F, B, F, I]\tag{2.13}$$

e que a de v para y é

$$N(s) = [A_F, B, C_F, D]\tag{2.14}$$

Assim sendo, $u = Mv$ e $y = Nv$, de modo que $y = NM^{-1}u$, isto é, $G = NM^{-1}$.

De forma similar, pela escolha duma matriz real H tal que $A_H = A + HC$ seja estável e, definindo

$$B_H := B + HD\tag{2.15}$$

$$\tilde{M}(s) := [A_H, H, C, I]\tag{2.16}$$

$$\tilde{N}(s) := [A_H, B_H, C, D]\tag{2.17}$$

tem-se que $G = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$.

Obtém-se assim quatro matrizes em RH_{∞} que satisfazem a primeira equação do Lema 1.

As fórmulas para as outras quatro matrizes que satisfazem a segunda equação do lema são as seguintes:

$$X(s) := [A_F, -H, C_F, I] \quad (2.18)$$

$$Y(s) := [A_F, -H, F, 0] \quad (2.19)$$

$$\tilde{X}(s) := [A_H, -B_H, F, I] \quad (2.20)$$

$$\tilde{Y}(s) := [A_H, -H, F, 0] \quad (2.21)$$

Para funções de transferência escalares, as factorizações coprimas direitas são também factorizações coprimas esquerdas, dando origem a factorizações duplamente coprimas. O seguinte código MATLAB permite a determinação de uma factorização coprima no caso escalar

```
function[M,N,X,Y]=coprime(G)
% FACTORIZAÇÃO COPRIMA DE UMA
%FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA ESCALAR G
[num,den]=tfdata(G,'v');
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den);
sA=size(A);sA=sA(1); F = -acker(A,B, -ones(sA,1));
AF = A + B*F;CF = C + D*F;
M = ss(AF,B,F,1);M=tf(M);
N = ss(AF,B,C,D);N=tf(N);
H = (-acker(A',C',-ones(sA,1)))';
X = ss(AF,-H,C,1);X=tf(X);
Y = ss(AF,-H,F,0);Y=tf(Y);
end
```

Exemplo

Usando a função **coprime** obtemos para $G(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2}$:

$$M(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^2 + 2s + 1}, N(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 1}, X(s) = \frac{s^2 + 6s + 5}{s^2 + 2s + 1}, Y(s) = \frac{-12s + 4}{s^2 + 2s + 1},$$

Verificando-se, de facto, que $M(s)X(s) - N(s)Y(s) = 1$, ou seja, $G(s) = (M(s))^{-1}N(s)$ é uma factorização coprima direita de G .

2.3.2 Estabilização em termos de factorizações coprimas

Apresentaremos de seguida, sem demonstração, uma condição para a estabilização de uma planta G por um controlador K (ambas matrizes de transferência racionais-reais e próprias).

Teorema 2. Sejam G e K dados pelas seguintes factorizações coprimas direitas e esquerdas:

$$G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N} \quad (2.22)$$

$$K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}. \quad (2.23)$$

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) K estabiliza G ;

$$(ii) \quad \left[\begin{array}{c|c} M & \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} U \\ \hline [0 \quad I]N & V \end{array} \right]^{-1} \in RH_{\infty}$$

$$(iii) \quad \begin{bmatrix} \tilde{M} & \tilde{N} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ \tilde{U} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} & \tilde{V} \end{bmatrix}^{-1} \in RH_{\infty}$$

2.3.3 Estabilizabilidade em termos de factorizações coprimas

G é estabilizável se existir K própria e racional-real que a estabiliza. Nem todas as matrizes de transferência G são estabilizáveis. Por exemplo, se $G_{12} = 0$ e $G_{22} = 0$, com G_{11} instável, G é obviamente não estabilizável. Em termos de modelo de espaço de estados, G é estabilizável se os seus modos instáveis forem controláveis por u e observáveis a partir de y .

O teorema que se segue, que enunciamos sem demonstração, é um teste para a estabilizabilidade em termos de factorizações coprimas esquerdas e direitas.

Teorema 3. Seja $G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$, onde as factorizações são coprimas.

Então, as seguintes condições são equivalentes

- (i) G é estabilizável
- (ii) $M, \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} N$ são coprimas à direita

$$M, \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \text{ são coprimas à esquerda}$$

- (iii) $\tilde{M}, \tilde{N} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ são coprimas à esquerda

$$M, \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \text{ são coprimas à direita.}$$

É ainda importante o seguinte resultado, que permite reduzir a estabilização da matriz de transferência G à estabilização de um dos seus blocos.

Teorema 4. K estabiliza G se e só se K estabiliza G_{22} .

2.3.4 Parametrização

Vamos parametrizar todos os controladores K que estabilizam G_{22} , que passaremos a denotar simplesmente por G . Suportamo-nos no diagrama de blocos da figura que se segue.

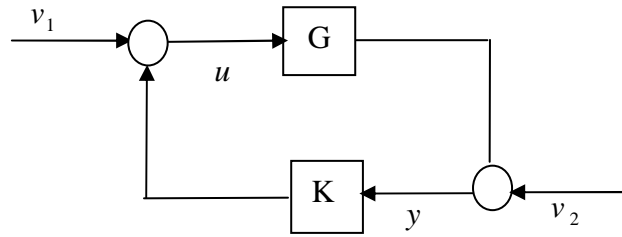


Figura 2.3. Diagrama para parametrização dos controladores [Francis 1987]

Tomemos uma factorização duplamente coprime de G

$$G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$$

com

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & -\tilde{Y} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & Y \\ N & X \end{bmatrix} = I \quad (2.31)$$

Teorema 6. Com a notação anterior, o conjunto de todos os controladores K (racionais-reais e próprios) que estabilizam G é parametrizado pelas fórmulas:

$$\begin{aligned} K &= (Y - MQ)(X - NQ)^{-1} \\ &= (\tilde{X} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} - Q\tilde{M}) \\ Q &\in RH_{\infty} \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.4 Reformulação do problema standard

Voltando ao problema standard da Figura 2.1, o Teorema 6 dá-nos todos os estabilizadores K como uma transformação do parâmetro livre Q em RH_∞ . O nosso objectivo aqui é exprimir a matriz de transferência de w para z em termos do parâmetro Q .

Voltemos a considerar o índice 22 em G e tomemos uma factorização duplamente coprima de G_{22} :

$$G_{22} = N_2 M_2^{-1} = \tilde{M}_2^{-1} \tilde{N}_2$$

com

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_2 & -\tilde{Y}_2 \\ -\tilde{N}_2 & \tilde{M}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 & Y_2 \\ N_2 & X_2 \end{bmatrix} = I. \quad (2.33)$$

Então a fórmula para K é

$$K = (Y_2 - M_2 Q)(X_2 - N_2 Q)^{-1} \quad (2.34a)$$

$$= (\tilde{X}_2 - Q\tilde{N}_2)^{-1}(\tilde{Y}_2 - Q\tilde{M}_2). \quad (2.34b)$$

Agora defina-se

$$\begin{aligned} T_1 &:= G_{11} + G_{12} M_2 \tilde{Y}_2 G_{21} \\ T_2 &:= G_{12} M_2 \\ T_3 &:= \tilde{M}_2 G_{21}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Teorema 7. As matrizes de transferência T_i ($i=1-3$) pertencem a RH_∞ . Com a notação anterior e K dado por (2.34), a matriz de transferência de w para z é igual a $T_1 - T_2 Q T_3$.

Prova. Omitimos a demonstração da primeira afirmação. Relativamente à segunda afirmação, recorde-se que, de acordo com (2.4),

$$z = [G_{11} + G_{12} K (I - G_{22} K)^{-1} G_{21}] w. \quad (2.36)$$

Substituindo $G_{22} = N_2 M_2^{-1}$ e (2.34b) em $(I - KG_{22})^{-1}$ e usando (2.33), obtém-se

$$(I - KG_{22})^{-1} = M_2 (\tilde{X}_2 - Q\tilde{N}_2).$$

Então, mais uma vez por (2.34b),

$$(I - KG_{22})^{-1} K = M_2 (\tilde{Y}_2 - Q\tilde{M}_2).$$

Substituindo esta expressão em (2.36) e usando as definições de T_i , obtém-se finalmente que

$$z = (T_1 - T_2 Q T_3) w.$$

o que conclui a demonstração. ■

A determinação das funções de transferência T_1, T_2, T_3 a partir das funções de transferência G_1, G_2, G_3 (no caso em que estas são escalares) pode ser feita através do seguinte código MATLAB.

```
function [T1,T2,T3]=t123(G11,G12,G21,G22)
[M,N,X,Y]=coprime(G22);
T1 = minreal(parallel(G11,series(series(G12,M),series(Y,G21))));
T2 = series(G12, M);
T3 = series(M,G21);
end
```

Exemplo

A aplicação deste código a

$$G_{11} = -1, \quad G_{12} = \frac{1-2s}{s+1}, \quad G_{21} = -1, \quad G_{22} = \frac{s+2}{s+1},$$

Resulta em

$$T_1 = G_{11}, \quad T_2 = \frac{1-2s}{s+1} = G_{12}, \quad T_3 = G_{21}.$$

Tendo em conta esta reformulação da função de transferência em termos do parâmetro Q , o nosso problema standard inicial coloca-se agora nos seguintes termos.

Dadas três matrizes T_i ($i=1,2,3$) em RH_∞ , encontrar uma matriz Q em RH_∞ de modo a minimizar $\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty$.

Este problema pode ser visto como o seguinte problema de ajuste de modelo: pretende-se determinar a função de transferência Q de modo a que a ligação em série de T_3 , Q e T_2 ajuste, ou seja, aproxime o melhor possível (segundo a norma H_∞) a função de transferência T_1 (ver Figura 2.4).

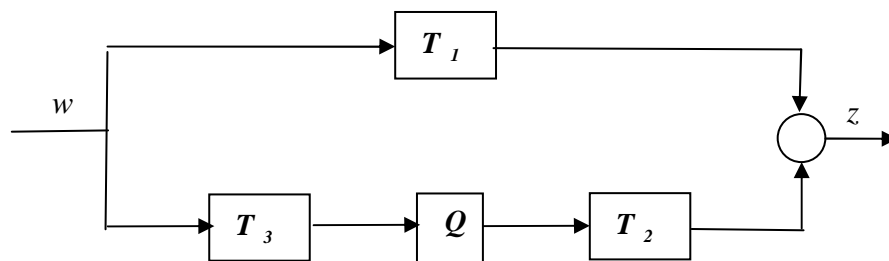


Figura 2. 4. Ajuste de modelo [Francis 1987]

2.5 Solução do problema de ajuste de modelo – caso escalar

Nesta secção apresentam-se condições para a existência de solução para o problema de ajuste de modelo anteriormente definido, dando-se uma solução completa para este problema no caso escalar.

2.5.1 Existência de solução

A cada Q em RH_∞ corresponde um erro de ajuste $\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty$. Seja α o ínfimo do erro de ajuste

$$\alpha := \inf \left\{ \|T_1 - T_2QT_3\|_\infty \right\}.$$

Uma matriz Q em RH_∞ satisfazendo $\alpha = \|T_1 - T_2QT_3\|_\infty$ é dita uma solução ótima do problema de ajuste, ou simplesmente uma matriz de transferência ótima.

O teorema que se segue dá uma condição suficiente para a existência de uma matriz de transferência ótima.

Teorema 8. Existe uma solução Q ótima para o problema de ajuste se as características das duas matrizes $T_2(j\omega)$ e $T_3(j\omega)$ forem constantes para todo $0 \leq \omega \leq \infty$.

2.5.2 Determinação de uma solução ótima – caso escalar

Quando as funções de transferência T_i ($i = 1, 2, 3$) (e a solução procurada Q) são escalares, verifica-se que

$$T_1 - T_2QT_3 = T_1 - T_2T_3Q,$$

uma vez que Q e T_3 comutam. Assim, é possível redefinir o produto T_2T_3 como uma nova matriz T_2 e supor que a nova matriz T_3 é igual a 1. Adoptaremos esta simplificação no que se segue. O nosso problema será então:

$$\min_{Q \in RH_\infty} \|T_1 - T_2Q\|_\infty. \quad (2.37)$$

A condição suficiente para a existência de solução do Teorema 8 reduz-se neste caso a exigir que $T_2(j\omega) \neq 0$ para todo $0 \leq \omega \leq \infty$, hipótese que suporemos verificada daqui em diante. Finalmente assumiremos que $T_2^{-1} \notin RH_\infty$, uma vez que caso contrário o problema teria como solução trivial $Q = T_2^{-1}T_1 \in RH_\infty$.

A solução do problema de minimização (2.37) passa por uma nova formulação do problema, levada a cabo à custa da factorização interna-externa da função de transferência T_2 . Definamos então o que se entende por função interna e função externa. Uma função de valor escalar T em RH_∞ diz-se interna se

$$T(-s)T(s) = 1.$$

T em RH_∞ diz-se uma função externa se não tiver zeros s com $\text{Re}(s) > 0$. Exemplos de funções internas são

$$1, \frac{1-s}{1+s}, \frac{1-s+s^2}{1+s+s^2}.$$

As funções internas têm pólos e zeros simétricos em relação ao eixo imaginário: $s = s_0$ é um zero se e só se a sua reflexão relativamente ao eixo imaginário $s = -\bar{s}_0$ for um pólo. Observe-se que os zeros de funções internas se localizam todos no semiplano direito.

Exemplos de funções externas são

$$1, \frac{s+2}{s+1}, \frac{s}{s+1}.$$

Os zeros de uma função externa localizam-se todos fora do semiplano direito $\text{Re } s > 0$. Na terminologia da engenharia electrotécnica, uma função interna é estável e passado com magnitude unitária, enquanto que uma função externa é estável de fase mínima.

Lema 9. Todas as funções escalares T em RH_∞ têm uma factorização $T = T_i T_o$ com T_i interna e T_o externa. Se $T(j\omega) \neq 0$ para todo $0 \leq \omega \leq \infty$, então $T_o^{-1} \in RH_\infty$.

Demonstração

Considere-se uma representação fraccionária irreduzível $T(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ (isto é, onde os polinómios $n(s)$ e $d(s)$ não têm zeros comuns). Sejam s_1, \dots, s_r os zeros de $n(s)$ contidos no semi-plano positivo, $\text{Re } s > 0$, contando com as multiplicidades. Definindo

$$T_i(s) = \prod_{j=1}^r \frac{s_j - s}{\bar{s}_j - s} \quad \text{e} \quad T_o = \frac{T}{T_i}$$

Verifica-se que, obviamente, $T = T_i T_o$ e que T_i é uma função interna, enquanto que T_o é uma função externa.

Note-se que os zeros de T e T_o fora de $\text{Re } s > 0$ coincidem. Assim, se T não tiver zeros no eixo imaginário, o mesmo acontece com T_o , que nesse caso só tem zeros em $\text{Re } s < 0$. Além disso, se T não tiver zeros em ∞ , isto é, se não for estritamente própria, T_o também é própria, mas não estritamente. Conclui-se deste modo, que se $T(j\omega) \neq 0$ para todo $0 \leq \omega \leq \infty$, então T_o^{-1} pertence a RH_∞ . ■

Uma factorização como a apresentada no lema anterior é denominada por factorização interna-externa.

O código MATLAB que a seguir se apresenta destina-se à obtenção de uma factorização interna-externa de uma função de transferência escalar $T(s)$.

```

function [INT,EXT]=intext(T)
% FACTORIZAÇÃO INTERNA-EXTERNA DE T
%DETERMINAÇÃO DE Ti - aqui designada por INT - E DA SUA
%INVERSA - INVINT
Z = zero(T);
s = size(Z); s=s(1);
if s == 0
    EXT=T;
    INT=tf(1,1);
else
    INT=1; INVINT = 1; N = 1;
    while le(N,s)
        if gt(real(Z(N)),0);
            TT = tf([-1 Z(N)], [1 conj(Z(N))]);
            INVT = tf([1 conj(Z(N))], [-1 Z(N)]);
            INT = series(INT,TT);
            INVINT=series(INVINT,INVT);
            N=N+1;
        else
            N = N+1;
        end
    end
end;
%DETERMINAÇÃO DE To - aqui designada por EXT
EXT=series(T, INVINT);
EXT=minreal(EXT);
end

```

Exemplo

Para $T(s) = \frac{(s-1)(s-5)}{(s+2)^2}$, a função **intext** fornece

$$INT = \frac{(s-1)(s-5)}{(s+1)(s+5)}, \quad EXT = \frac{(s+1)(s+5)}{(s+2)^2}.$$

Facilmente se verifica que $INT(s)INT(-s) = 1$, ou seja, INT é uma função interna, enquanto que os zeros de $EXT(s)$, $s = -1$ e $s = -5$, não têm parte real positiva, ou seja EXT é de facto uma função externa.

Voltando a considerar o problema de ajuste de modelo na sua forma (2.37), tomemos uma factorização interna-externa de $T_2 : T_2 = T_{2i}T_{2o}$. Para Q em RH_∞ temos

$$\begin{aligned}
\|T_1 - T_2 Q T_3\|_\infty &= \|T_1 - T_{2i} T_{2o} Q\|_\infty \\
&= \|T_{2i} (T_{2i}^{-1} T_1 - T_{2o} Q)\|_\infty \\
&= \|T_{2i}^{-1} T_1 - T_{2o} Q\|_\infty \\
&= \|R - X\|_\infty
\end{aligned} \tag{2.38}$$

onde

$$R := T_{2i}^{-1} T_1 \tag{2.39}$$

$$X := T_{2o} Q. \tag{2.40}$$

A igualdade em (2.38) resulta da propriedade $|T_{2i}(j\omega)| = 1$, uma vez que por isso

$$\begin{aligned}
\|T_{2i} (T_{2i}^{-1} T_1 - T_{2o} Q)\|_\infty &= \sup_{\omega \in IR} |T_{2i}(j\omega) (T_{2i}^{-1} T_1 - T_{2o} Q)(j\omega)| \\
&= \sup_{\omega \in IR} |T_{2i}(j\omega)| |(T_{2i}^{-1} T_1 - T_{2o} Q)(j\omega)| = \sup_{\omega \in IR} |(T_{2i}^{-1} T_1 - T_{2o} Q)(j\omega)| = \|T_{2i}^{-1} T_1 - T_{2o} Q\|_\infty.
\end{aligned}$$

Dado que T_{2o} e $T_{2o}^{-1} \in RH_\infty$, (2.40) estabelece uma correspondência biunívoca entre as funções Q em RH_∞ e as funções X em RH_∞ . Conclui-se que

$$\alpha := \inf \{ \|R - X\|_\infty : X \in RH_\infty \} \tag{2.41a}$$

$$= \text{dist}(R, RH_\infty) \tag{2.41b}$$

Uma função X em RH_∞ que satisfaz

$$\alpha = \|R - X\|_\infty$$

será designada óptima. Note-se que uma função de transferência X^* óptima origina uma função de transferência Q^* óptima através da relação (2.40).

A determinação de uma solução óptima X^* para o problema de minimização

$$\min \{ \|R - X\|_{\infty} : X \in RH_{\infty} \}$$

e da correspondente solução óptima Q^* pode ser levada a cabo através do algoritmo que a seguir se apresenta. Omitimos a demonstração da optimalidade da função de transferência obtida, uma vez que ela recorre a ferramentas de análise funcional que saem do âmbito deste trabalho.

Algoritmo

- 1) Fazer uma factorização interna-externa de $T_2 = T_{2i}T_{2o}$.
- 2) Definir $R := T_{2i}^{-1}T_1$
 - 2.1) Decompor R como a soma $R = R_1 + R_2$, onde R_1 é estritamente própria e tem pólos apenas em $\text{Re } s > 0$ e R_2 pertence a RH_{∞}
 - 2.2) Obter uma realização minimal $R_1(s) = [A, B, C, 0]$
- 3) Resolver as equações $AL_c + L_cA^T = BB^T$ e $A^TL_o + L_oA = C^TC$
- 4) Determinar o máximo valor próprio λ^2 de L_cL_o e um vector próprio correspondente w .
- 5) Definir $f(s) = [A, w, C, 0]$ e $g(s) = [-A^T, \lambda^{-1}L_o w, B^T, 0]$
- 6) Definir $X^* = R - \lambda f / g$ e $Q^* = T_{2o}^{-1}X^*$.

Note-se que a função de transferência $R_1(s)$ na decomposição a que se refere o ponto 2) deste algoritmo corresponde à parte de $R(s)$ que determina a sua distância a RH_{∞} .

Esta decomposição pode ser obtida através do seguinte código MATLAB, no caso escalar.


```

function[A,B,C]=decomp(R)
%
% DETERMINAÇÃO DE UMA REALIZAÇÃO MINIMAL (A,B,C) DA
% FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA R1 ESTRITAMENTE PRÓPRIA E COM
% PÓLOS DE PARTE REAL POSITIVA, RELATIVA À DECOMPOSIÇÃO
% R=R1+R2 - determina-se primeiro uma realização de espaço
% de estados para R
% com matriz de estados diagonal e seleccionando um
% subsistema instável, cuja
% função de transferência é R1.
%
% REALIZAÇÃO DE ESPAÇO DE ESTADOS PARA R
R = minreal(R);
sys=ss(R);
[A,B,C,D]=ssdata(sys);
%
% DIAGONALIZAÇÃO DA MATRIZ A E DETERMINAÇÃO DA
% CORRESPONDENTE REALIZAÇÃO EQUIVALENTE PARA R
%
[V,D] = eig(A);
A=inv(V)*A*V; B=inv(V)*B; C=C*V;
%
% SELECÇÃO DE UM SUBSISTEMA INSTÁVEL COM FUNÇÃO DE
% TRANSFERÊNCIA R1 - realização minimal (A,B,C) para R1
%
n = 0; s = size(A); s=s(1);
while and(real(D(n+1,n+1)) > 0,n+1 < s);
    n = n+1;
end;
A=A(1:n,1:n);
B = B(1:n);
C=C(1:n);
end

```

Exemplo

Para $R(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 11s + 5}{10s^3 - 59s^2 + 44s + 6}$, a função **decomp** fornece

$$R_1 = \frac{1.225s + 0.9088}{s^2 - 6.017s + 5.107}.$$

2.6 Implementação em Matlab

Com base no algoritmo apresentado na secção anterior, juntamente com o procedimento para determinação das funções de transferência T_i , $i = 1,2,3$, foi elaborada uma rotina em Matlab que permite determinar o controlador óptimo, K_{opt} , e a correspondente função de transferência em malha fechada da perturbação para a variável a controlar, MF , dados os numeradores e denominadores das quatro funções de transferência G_{11} , G_{12} , G_{21} e G_{22} .

```

function[Kopt,MF]=controlador(G11,G12,G21,G22)
[num11,den11]=tfdata(G11,'v');
[num12,den12]=tfdata(G12,'v');
[num21,den21]=tfdata(G21,'v');
[num22,den22]=tfdata(G22,'v');
[T1,T2,T3]=T123(G11,G12,G21,G22);
% Definição de uma nova função de transferência T2=T1T2
T2=minreal(series(T2,T3));
% Factorização interna-externa de T2
[INT,EXT]=intext(T2)
% Definição da matriz R
[nint,dint]=tfdata(INT,'v');
INVINT=tf(nint,dint);
R = series(INVINT,T1);
% DETERMINAÇÃO DE UMA REALIZAÇÃO (A,B,C) DE R1 TAL QUE
% R = R1 + FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM RH-infinito
[A,B,C]=decomp(R);
% DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA XX EM RH-INFINITO MAIS PRÓXIMA
% DE R
na=size(A);na=na(1);
if na ==0
    XX=R ;
else
% DETERMINAÇÃO DE LC E LO
sys = ss(-A,B,C,0);
LC = GRAM(sys,'c');
LO = GRAM(sys,'o');
% DETERMINAÇÃO DE Q* (aqui designado por Qopt)
L=LC*LO;
[V,D]=eig(L);
s=size(D);s=s(1);
lambda2=D(s,s); W=V(:,s); lambda=sqrt(lambda2);
F=tf(A,W,C,0);
G=tf(-A',(1/lambda)*LO*W,B',0);
[ng,dg]=tfdata(G,'v');
INVG=tf(dg,ng);
LF=lambda*F;
FG=series(-LF,INVG);
XX=parallel(R,FG);
end
[ne,de]=tfdata(EXT,'v');
INVEXT=tf(de,ne);
Qopt=series(INVEXT,XX);
%DETERMINAÇÃO DE K* (aqui designado por Kopt)
[M,N,X,Y]=coprime(G22)
DK=parallel(X,-series(N,Qopt));
NK=parallel(Y,-series(M,Qopt));
INVDK= feedback(1,parallel(-1,DK),+1);
TESTE=series(NK,INVDK);
Kopt=minreal(series(NK,INVDK));
% FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA FECHADA DE w para z - MF
MF=minreal(G11+G12*Kopt*inv(1-G22*Kopt)*G21);
end
end

```

3. Aplicação: controlo de sistemas eléctricos de energia

3.1 O esquema de controlo

Como foi mencionado no Capítulo 1, num sistema de energia eléctrico em regime estacionário temos turbinas a fornecer uma potência P_M e um consumo por parte da rede (consumidores mais perdas na rede) P_C . Um consumo adicional por parte da rede deve ter uma resposta adequada por parte da turbina no sentido de manter o equilíbrio entre o P_M e P_C , de modo a preservar a estabilidade do sistema. Entretanto, não é instantânea a resposta da turbina ao aumento da carga, pelo que a reacção instantânea acontece à custa da energia cinética do sistema que se manifesta na variação da frequência f e da velocidade $w = 2\pi f$ do sistema. Como à variação de frequência é imposto um limite, por razões de ordem técnica, é introduzido um sistema de controlo de frequências, ou equivalentemente, de velocidades.

O sistema resultante do controlo clássico apresentado na Figura 1.4 pode ser reformulado como se mostra no esquema que se segue, onde o ganho $\tilde{K} = K/M$ e pólo p são os parâmetros do regulador, que deverão ser ajustados de modo a fazer a rejeição assintótica das variações ΔP_C da potência de carga relativamente ao seu valor nominal.

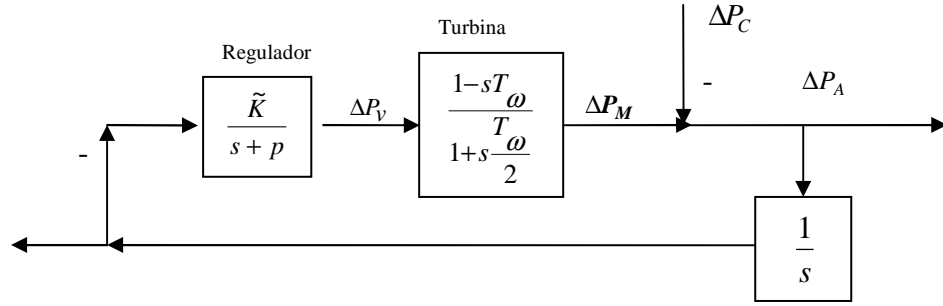


Figura 3.1 Diagrama de blocos do regulador de velocidade e da turbina reformulado

De acordo com este esquema, a relação entre ΔP_C e ΔP_A é dada por:

$$\Delta P_A = \frac{s(1 + sT_\omega/2)(s + p)}{s(s + p)(1 + sT_\omega/2) + \tilde{K}(1 - sT_\omega)} \Delta P_C. \quad (3.1)$$

Como alternativa a este esquema clássico de controlo, a tarefa que nos colocamos é agir sobre o sistema (regulando a abertura da válvula, isto é controlando o valor de ΔP_v) de modo a que a influência de ΔP_C seja minimizada (no sentido de que é minimizada a norma H_∞ da função de transferência de ΔP_C para ΔP_A).

O esquema que utilizaremos está representado na Figura 3.2. Aqui, a variável que entrará no controlador para produzir um valor adequado da variável de controlo u é a variável

$$y = \Delta P_A + 2\Delta P_v.$$

A escolha deste esquema está relacionada com a necessidade de satisfazer as restrições às funções de transferência G_{ij} , $i, j = 1, 2$ impostas no Capítulo 2. Mais concretamente, a função de transferência G_{22} tem de ser estritamente própria e as funções de transferência T_2, T_3 não podem anular-se no eixo imaginário.

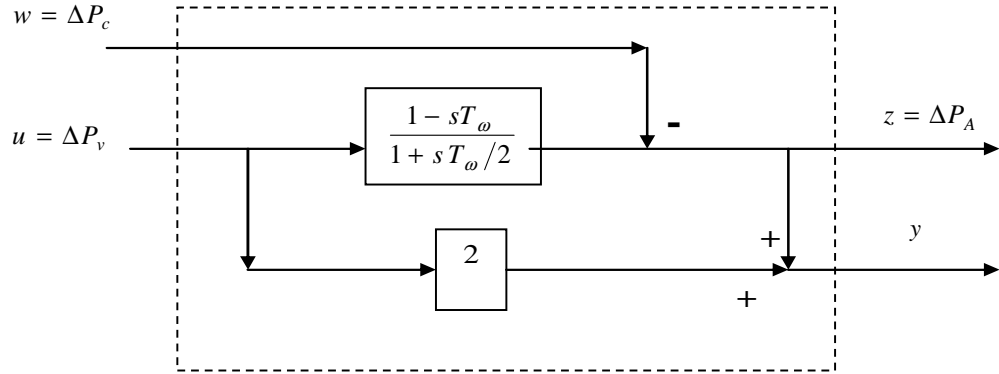


Figura 3.2 Esquema a utilizar na abordagem de controlo H_∞ .

As equações correspondentes são da forma

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} G_{11} &= -1 \\ G_{12} &= \frac{1 - sT_\omega}{1 + sT_\omega/2} \\ G_{21} &= -1 \\ G_{22} &= \frac{3}{1 + sT_\omega/2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

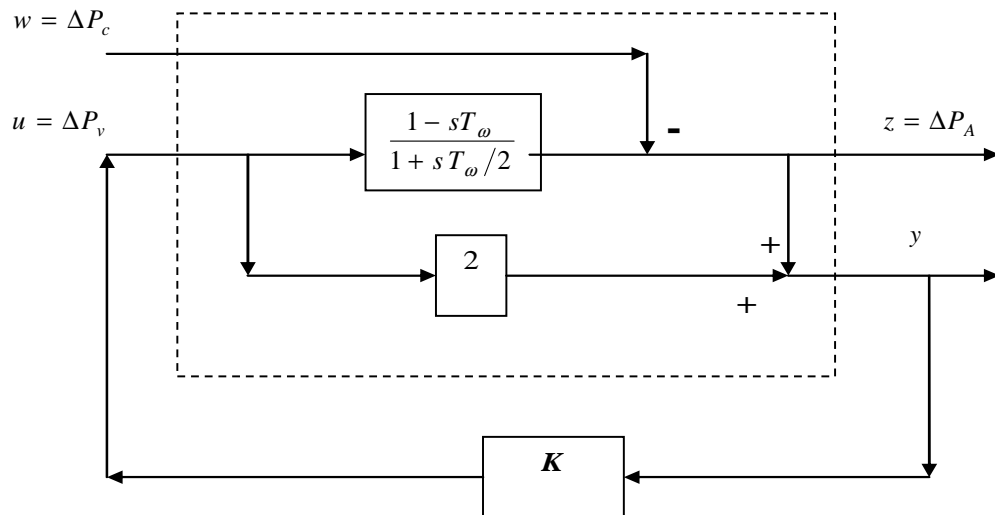


Figura 3.3 Sistema em malha fechada.

Estamos agora em condições de desenhar um controlador estabilizante que minimize a norma H_∞ da função de transferência que relaciona os desvios $w = \Delta P_C$ da potência de carga com os desvios $z = \Delta P_A$ da potência de aceleração relativamente ao valor nominal desejado. De facto, juntando os procedimentos apresentados nas secções 2.3.1, 2.3.4, 2.4 e 2.5.2, o controlador pretendido pode ser determinado através do Matlab pelo conjunto instruções apresentado na secção 2.6. Com base nas funções definidas no Capítulo 2 para uma situação geral, construímos a função **REGTUR** (regulação de uma turbina hidráulica) que permite fazer a regulação de uma turbina hidráulica, tendo por entrada a constante T_ω da turbina e como resultados o controlador óptimo, **Kopt**, procurado e a correspondente função de transferência em malha fechada w para z em (2.4), que designamos por **MF**.

```
function[Kopt,MF]=REGTUR(Tw)
% Definicao das funcoes de transferencia G11,G12,G21,G22
G11=tf(-1,1);G12=tf([-Tw 1],[Tw/2 1]);G21=G11;G22=tf(3,[Tw/2 1]);
[Kopt,MF]=controlador(G11,G12,G21,G22);
end
```

3.2 Simulações

Nas simulações que se seguem, consideramos uma turbina caracterizada por uma constante $T_w = 2$ e comparamos o desempenho do nosso controlador com o do regulador clássico.

Neste caso, a função de transferência de (3.1), que designaremos por $H(s)$, é dada por

$$H(s) = \frac{s(s+1)(s+p)}{s(s+1)(s+p) + \tilde{K}(1-2s)},$$

sendo os valores de p e \tilde{K} os parâmetros ajustáveis do correspondente esquema de controlo. Por exemplo, tomando $p = 2$ e $\tilde{K} = 0.2$, obtém-se

$$H(s) = \frac{s(s+1)(s+2)}{s^3 + 3s^2 + 1.6s + 0.2}, \quad (3.3)$$

com pólos $s \approx -2.36$, $s \approx -0.46$, $s \approx -0.19$, que, por ser estável atenua impulsos.

A aplicação da função **REGTUR** ao nosso esquema de controlo resulta no controlador

$$K_{opt}(s) = 0.5,$$

que é um ganho puro, e na função de transferência em malha fechada

$$MF(s) = 0.$$

Isto significa que o controlador desenhado pelo nosso método permite libertar totalmente a variável de interesse, ΔP_A , da influência de variações na potência de carga (ΔP_C).

A Figura 3.4 representa as respostas impulsiais de $H(s)$ e $MF(s)$.

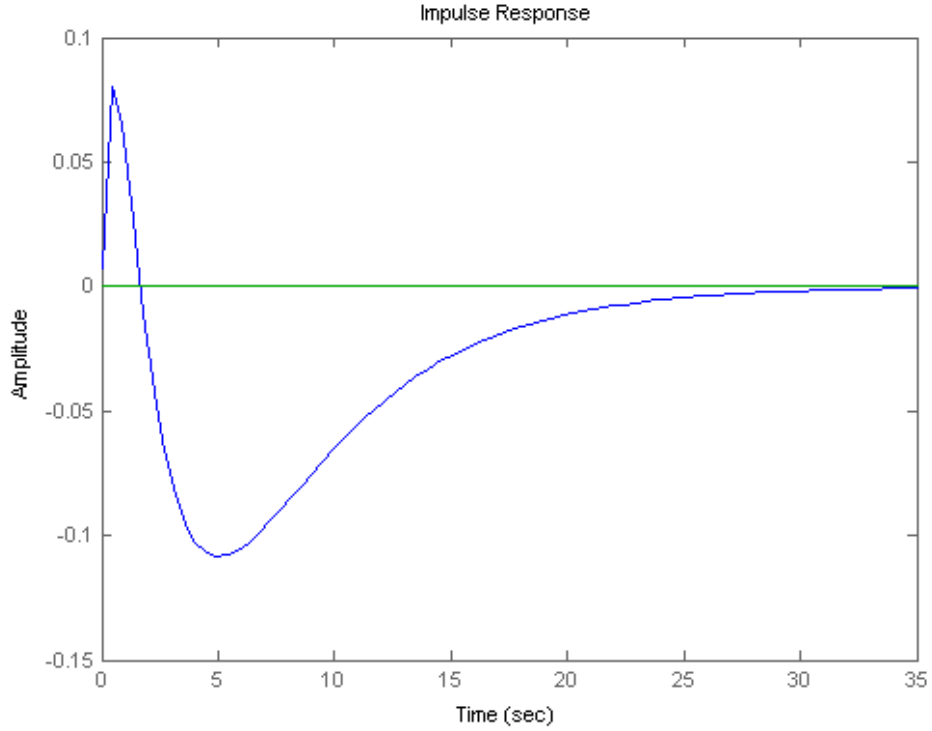


Figura 3.4. Respostas impulsiais de $H(s)$, a azul, e de $MF(s)$, a verde.

O resultado obtido para a função de transferência $MF(s)$ pode ser explicado pelo facto de estarmos a supor que podemos ter acesso simultaneamente a ΔP_A e a ΔP_v , o que implica que a perturbação $\Delta P_C = \Delta P_A - \Delta P_v$ também seja conhecida. sendo possível compensar o sistema de modo a que a sua influência seja anulada.

De facto, calculando $MF(s)$ para as funções de transferência G_{ij} de (3.2), obtemos:

$$MF(s) = \frac{(2K(s) - 1)(2 + sT_\omega)}{2 + sT_\omega - 6K(s)},$$

que se anula para $K(s) = 0.5$, independentemente do valor de T_ω .

Se pretendermos usar um esquema de controlo que utilize como variável de medição a variável Δw , tal como acontece no controlo clássico da frequência da turbina (cf. Figura 1.4), teremos de inverter a função de transferência $\frac{1}{Ms}$, o que corresponde a introduzir uma acção derivativa Ms , como mostra a Figura 3.5.

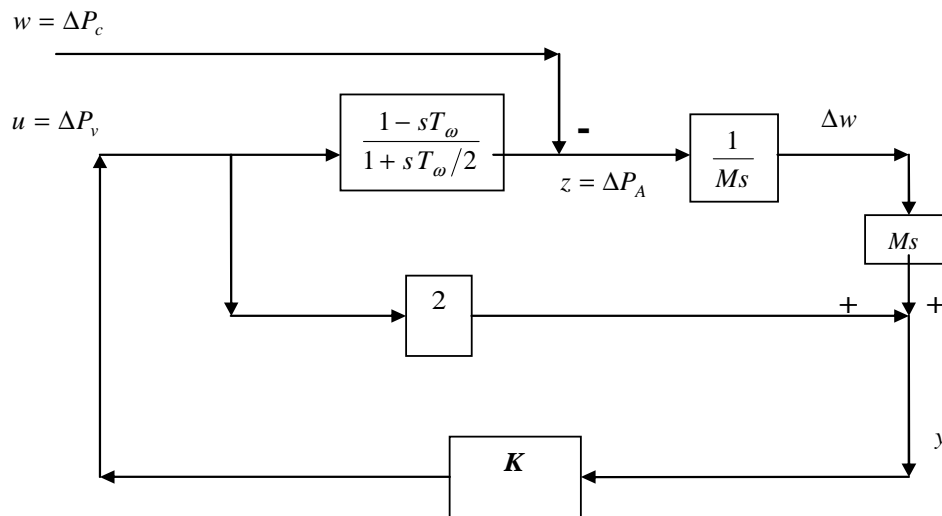


Figura 3.5 Sistema em malha fechada com medição com medição de Δw .

No entanto, na prática não é possível implementar uma acção derivativa pura. Para contornar este problema, substitui-se usualmente a função de transferência s pela aproximação $\frac{s}{1 + Ts}$, onde a constante T toma um valor muito pequeno. Isto dá origem ao esquema alternativo da Figura 3.6.

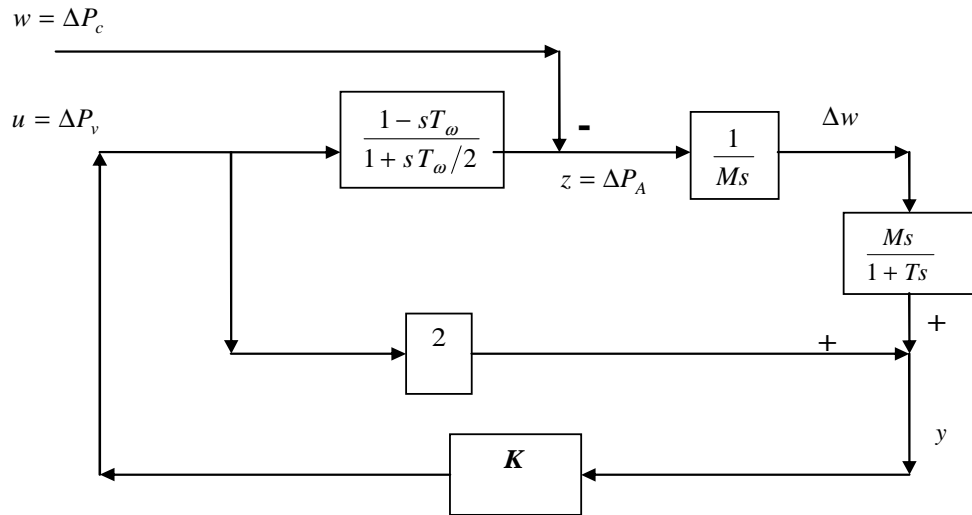


Figura 3.6 Esquema alternativo para controlo com medição de Δw .

A ideia será usar este esquema alternativo com o controlador $K = K_{opt} = 0.5$ anteriormente calculado. Agora temos que

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{1 + Ts} (Gu - w) \\ z &= Gu - w \\ u &= Ky \end{aligned} \quad ,$$

com

$$G(s) = \frac{1 - sT_\omega}{1 + sT_\omega/2} \quad . \quad (3.4)$$

Substituindo o valor de u em função de y e resolvendo em ordem a y a primeira equação, obtemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{GK - (1 + Ts)} w \\ z &= GK y - w \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$z = GK \frac{1}{GK - (1 + Ts)} w - w = \frac{1 + Ts}{GK - (1 + Ts)} w.$$

Substituindo $G(s)$ pela expressão dada em (3.4) e tomando $K = 0.5$, obtém-se finalmente $z = F(s) w$, com

$$F(s) = \frac{-(Ts + 1)}{Ts^2 + (T + 2)s + 0.5}.$$

Nas Figuras 3.7, 3.8 estão representadas as respostas das funções de transferência $H(s)$, correspondente ao sistema controlado pelo método clássico, e $F(s)$, correspondente ao sistema controlado pelo nosso método, para perturbações w impulsivas e sinusoidais, respectivamente.

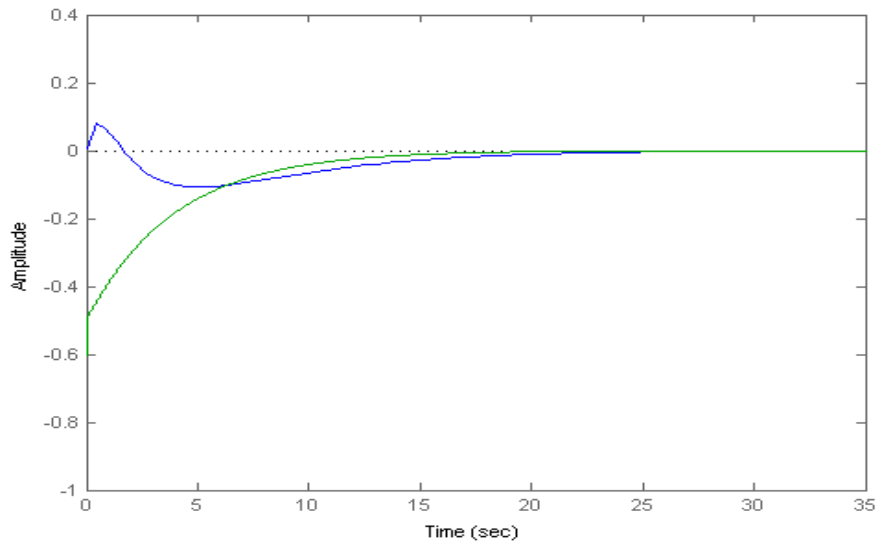


Figura 3.7. Resposta da variável $z = \Delta P_A$ a perturbações impulsivas, no sistema controlado pelo método clássico (a azul) e pelo nosso método (a verde).

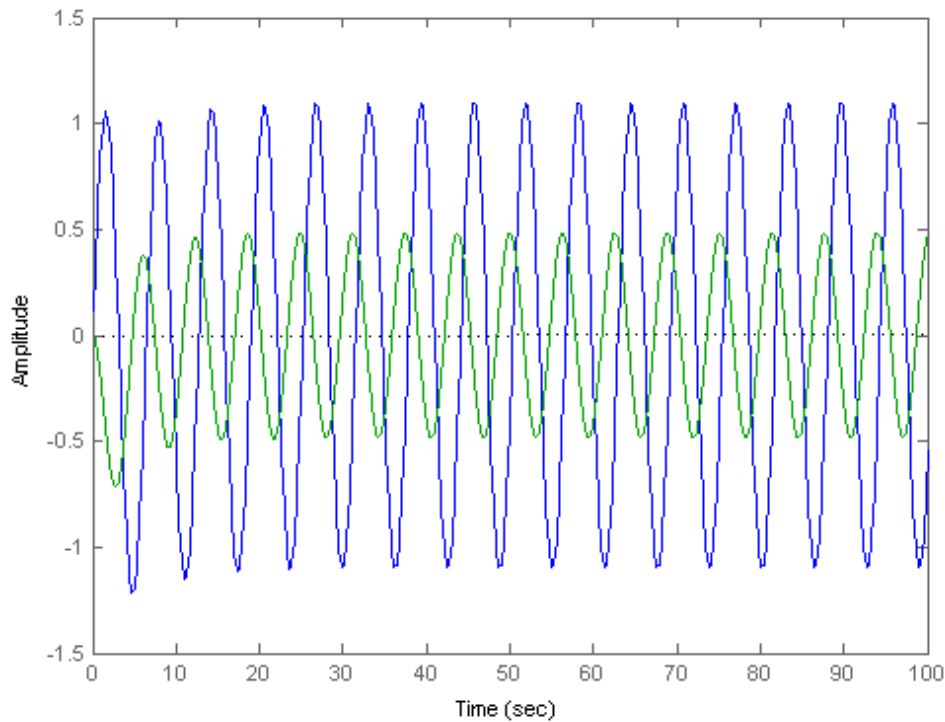


Figura 3.8. Resposta da variável $z = \Delta P_A$ a perturbações sinusoidais, no sistema controlado pelo método clássico (a azul) e pelo nosso método (a verde).

O nosso controlador é mais eficaz do que o método de controlo clássico: tem um melhor desempenho na rejeição de perturbações impulsivas e na atenuação de perturbações sinusoidais.

Em geral, através de métodos clássicos, é possível desenhar controladores que conseguem a rejeição (assintótica) de um determinado tipo pré-definido de perturbações. O desenho de controladores pelo método de minimização da norma H_∞ não tem por objectivo a rejeição de um tipo particular de perturbações, mas sim a minimização da influência da pior perturbação possível. Esta filosofia é conhecida em inglês por “worst case design”.

4. Conclusão

Neste trabalho aplicamos o projecto de controladores pelo critério de minimização da norma H-infinito ao controlo de sistemas eléctricos de energia, mais concretamente ao controlo da velocidade de uma turbina hidráulica.

O estudo realizado introduziu-nos a técnicas alternativas ao controlo clássico, usualmente não leccionadas nos cursos de Engenharia, baseadas em conceitos que não dominávamos, pela nossa formação de base naquela área.

Assim foi dedicado mais tempo à compreensão dos fundamentos das técnicas utilizadas e à elaboração dos códigos em MATLAB do que a um estudo comparativo entre o nosso controlador e diferentes tipos de controladores clássicos. Infelizmente, também não nos foi possível aplicar o desenho de controladores H-infinito ao controlo de outros tipos de turbinas, mas pensamos que o nosso trabalho fornece as ferramentas adequadas para a realização de um estudo neste sentido.

Refira-se ainda que os códigos MATLAB desenvolvidos permitem o desenho de controladores H-infinito não só para sistemas eléctricos, mas também para qualquer outro tipo de problema em que as funções de transferência G_{ij} sejam escalares.

5. *Bibliografia*

1. Elgerd, O., *Electric Energy Systems Theory: An introduction*, McGraw-Hill, Nova York, 1983 (2ª edição).
2. Francis, B.A., *A Course in H_∞ Control Theory*, Lectures Notes in Control and Information Sciences, n. 88, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1987.
3. Kailath, T, *Linear Systems*, Prentice-Hall Information and System Sciences Series, 1979.
4. Martins de Carvalho, J.L., *Sistemas de Controle Automático*, LTC Editora, Rio de Janeiro, 2002.
5. Peças Lopes, J., *Análise da Estabilidade de Sistemas Eléctricos de Energia*, Trabalho de síntese para as provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, FEUP, 1983.
6. Sucena Paiva, J.P., *Redes de Energia Eléctrica: uma análise sistémica*, IST Press, 2007 (2ª Edição).

Anexo

Sistemas de controlo – aspectos mais relevantes

Neste trabalho consideramos sistemas dinâmicos como processos com dois tipos de variáveis - as variáveis de entrada (*inputs*) e as variáveis de saída (*outputs*), sendo a evolução das segundas determinada pela das primeiras. As variáveis de entrada dividem-se ainda em *variáveis manipuláveis* ou *de controlo*, cujo valor pode ser regulado por um supervisor humano ou automático, e variáveis não manipuláveis, ou *exógenas*, que correspondem a factores da natureza ou perturbações, sob as quais não temos qualquer controlo. Também as variáveis de saída podem ser divididas em *variáveis mensuráveis*, que estão disponíveis para medição, podendo ser utilizadas como informação para mecanismos de regulação, e *variáveis não mensuráveis*. Denotaremos aqui por v_{in} o vector de todas as variáveis de entrada, e por v_{out} o vector das variáveis de saída, no seu conjunto.

Supomos que as variáveis de saída são uma função das variáveis de entrada, podendo a relação entre elas ser modelada por

$$V_{out}(t) = \int_0^t G(t - \tau) v_{in}(\tau) d\tau$$

onde o núcleo de convolução G é conhecido por resposta impulsional do sistema.

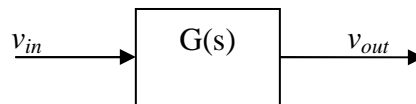
Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação (e partindo do princípio que existem as transformadas de v_{in} , v_{out} e G), obtemos

$$V_{out}(s) = G(s)V_{in}(s)$$

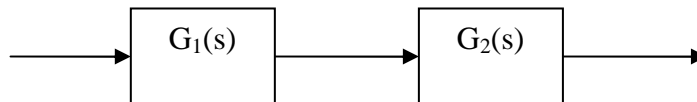
onde V_{in} , V_{out} , e G , designam as transformadas de v_{in} , v_{out} e G , respectivamente. A função (eventualmente matricial) $G(s)$ é conhecida por função de transferência do sistema. Quando não houver possibilidade de confusão, mantemos a mesma notação para as variáveis e as suas transformadas e omitimos o argumento complexo s , escrevendo apenas

$$v_{out} = G v_{in}$$

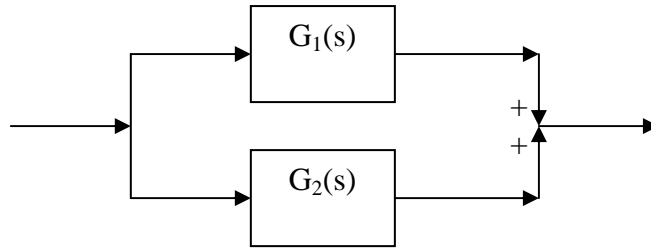
Esta relação representa-se esquematicamente pelo diagrama de blocos que se segue.



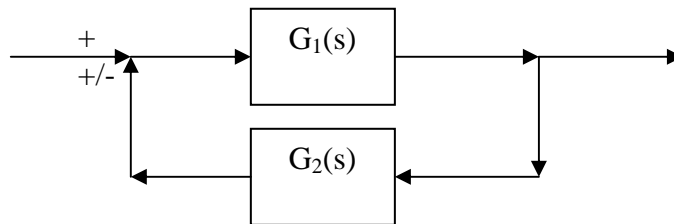
A interconexão de vários sistemas pode ser representada através de diferentes tipos de ligações entre blocos elementares, nomeadamente as ligações em série,



em paralelo e de realimentação, ilustradas nos esquemas que se seguem.



Ligação em paralelo



Ligação com realimentação

As funções de transferência resultantes destes três tipos de interconexão são dadas por

$$G_2(s)G_1(s), G_1(s) + G_2(s)e(I \pm G_1(s)G_2(s))^{-1}G_1(s),$$

respectivamente. As ligações de realimentação são usadas em esquemas de controlo, permitindo definir as entradas manipuláveis à custa de uma função das variáveis mensuráveis. Esta função é traduzida pela função de transferência do controlador, que usualmente se coloca no lugar de $G(s)$, na chamada malha de realimentação (ligação que vai da saída para a entrada). Há ainda outras arquitecturas onde o controlador é colocado em série com o sistema a controlar em vez de na malha de realimentação. Em qualquer dos casos, dada a existência de uma malha de realimentação, o sistema resultante é conhecido por sistema em *malha fechada*.

Os sistemas que estudamos possuem funções de transferência racionais próprias, isto é, no caso escalar (onde apenas há uma variável de entrada e uma variável de saída)

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

onde o numerador $n(s)$ e o denominador $d(s)$ são polinómios tais que $\text{grau}(n(s)) \leq \text{grau}(d(s))$. No caso matricial isto significa que todas as entradas de $G(s)$ são funções escalares racionais estritamente próprias.

Note-se que no caso de sistemas com uma variável de entrada e uma variável de saída, a função de transferência $G(s)$ é dada pela razão entre as transformadas de Laplace daquelas duas variáveis, isto é:

$$G(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}.$$

O núcleo de convolução G diz-se *estável* se a entradas limitadas fizer corresponder saídas limitadas. Neste caso também a correspondente função de transferência $G(s)$ se diz estável. Prova-se que $G(s)$ é estável se e só se os seus pólos possuírem todos parte real negativa.

A toda a função de transferência racional própria $G(s)$ pode ser associado um quádruplo de matrizes $[A,B,C,D]$ de dimensões adequadas, tais que

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D,$$

que se designa por *realização de espaço de estados* de $G(s)$. Isto corresponde à introdução de uma variável auxiliar $x(t)$, conhecida por variável de estado, que toma valores em IR^n (para um determinado n) e permite modelar a relação entre $v_{int}(t)$ e $v_{out}(t)$ através de equações da forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bv_{in}(t); & x(0) \in IR^n \\ v_{out}(t) = Cx(t) + Dv_{in}(t) \end{cases}$$

De facto, tomando transformadas de Laplace destas equações, e tendo em conta que $x(0) = 0$, obtém-se que

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B V_{in}(s)$$

e, conseqüentemente,

$$V_{out}(s) = \underbrace{(C(sI - A)^{-1} B + D)}_{G(s)} V_{in}(s).$$

Note-se que todos os pólos de $G(s)$ são pólos de $(sI - A)^{-1}$, ou seja, valores próprios da matriz A (podendo o recíproco não se verificar caso haja cancelamento entre pólos e zeros no produto $C(sI - A)^{-1} B$). Se todos os valores próprios da matriz A possuírem parte real negativa, diz-se que tanto esta matriz como a realização $[A, B, C, D]$ são estáveis. É assim evidente que a função de transferência correspondente a uma realização estável é também estável.

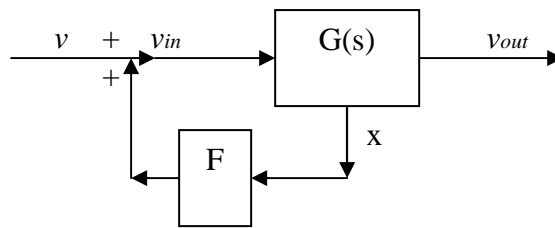
O par de matrizes (A, B) diz-se estabilizável se existir uma matriz F tal que a matriz $A + BF$ é estável. Isto significa que, definindo uma nova variável $v(t)$ à custa de $x(t)$ e de v_{in} como

$$v(t) = v_{in}(t) - Fx(t),$$

se obtém as equações

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + Bv(t) \\ v_{out}(t) = (C + DF)x(t) + Dv(t) \end{cases}$$

com $A + BF$ estável. Em termos de diagramas de blocos, esta acção, conhecida com realimentação do estado, pode ser representada do seguinte modo.



Isto permite tornar estável (estabilizar) a realização de espaço de estados e, consequentemente a função de transferência entre a variável $v(t)$ e a variável v_{out} .

Diz-se que o par de matrizes (C, A) é *detectável* se o par (A^T, B^T) (onde T denota transposição) for estabilizável. Isto significa que existe uma matriz H tal que $A+HC$ é estável e está relacionado com a possibilidade de construção dos chamados observadores do estado do sistema. Uma vez que este tópico não é essencial à compreensão deste trabalho, não entraremos em mais detalhes sobre o assunto.